УДК 514.822

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ЭКРАНА

Р.Б. Салимов[1], Т.Ю. Горская[2]

1 *salimov.rsb@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *tatyana_gorskaya@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматривается обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи твёрдой прямолинейной границы и обтекаемого потоком несжимаемой невязкой жидкости со скоростью на бесконечности, параллельной указанной границе. Требуется определить форму и положение крылового профиля по заданному на нём распределению потенциала скорости как функции абсциссы точки профиля, заданному значению скорости в передней кромке профиля и заданной разности значений функции тока на профиле и на прямоугольной границе (или величины, связанной с указанной разностью).

Ключевые слова: обратная краевая задача, крыловой профиль, несжимаемая невязкая жидкость, комплексный потенциал.

Пусть крыловой профиль L_z, расположенный в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, обтекается установившимся потоком несжимаемой невязкой жидкости, ограниченным прямой $y = -p$, $p = \text{const} > 0$, и имеющем на бесконечности скорость, равную $v_\infty e^{i\pi}$, $v_\infty > 0$.

Примем, что задняя кромка B профиля L_z имеет абсциссу $x = 0$, D есть точка профиля L_z, наиболее удалённая от мнимой оси, с известной абсциссой $x_D > 0$, и абсциссы всех остальных точек L_z удовлетворяют соотношению $0 < x < x_D$.

Будем считать, что точка разветвления потока A расположена на нижней поверхности L_z, её абсциссу обозначим $x = x_A$. Обозначим через s дуговую абсциссу точки L_z, отсчитываемую от точки разветвления потока A на профиле L_z в положительном направлении, при котором область течения остаётся справа.

Пусть $w(z) = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения вокруг L_z. Обозначая через v модуль скорости в точке z, через η угол наклона этой скорости к действительной оси, будем иметь $w'(z) = ve^{-i\eta}$.

Область течения обозначим D_z. Примем, что $\psi = 0$ на прямой $y = -p$, $\psi = -Q = \text{const} < 0$ на профиле L_z.

На дуге ADB профиля L_z имеем $\varphi'_s = v$, на остальной части профиля $\varphi'_s = -v$.

Примем, что в точке разветвления A потенциал скорости принимает значение $\varphi = 0$. С увеличением дуговой абсциссы s точки z профиля потенциал скорости φ возрастает, его значение в точке B обозначим φ_B, считая, что φ на участке ADB профиля L_z является непрерывной функцией от s. Если потенциал скорости φ на участке AB нижней поверхности профиля является непрерывной функцией от s, то на этом участке с уменьшением s, φ возрастает от нуля до значения в точке B, которое обозначим φ_H.

Разность $\varphi_B - \varphi_H = \Gamma$ есть циркуляция скорости v по профилю L_z. Будем считать, что $\Gamma > 0$.

На указанной части BA нижней поверхности профиля L_z выделим точку N, в которой $\varphi = \dfrac{\varphi_H}{2}$, и в дальнейшем будем считать, что потенциал скорости φ на профиле является непрерывной функцией от s всюду, кроме точки N с абсциссой x_N, и при обходе L_z в положительном направлении, начиная от точки N, получает приращение, равное $\varphi_B - \dfrac{\varphi_H}{2} - \dfrac{\varphi_H}{2} = \Gamma$.

Как показано в книге [1] (с. 97-105), если контур L_z неизвестен, на нём задано распределение величины скорости $v = v(s), 0 \le s \le l$, где l – периметр контура L_z, и требуется найти его форму, то эта задача оказывается разрешимой лишь при выполнении условий разрешимости – условий замкнутости контура L_z. Сказанное справедливо и для профиля L_z, расположенного вблизи экрана. Методы преодоления возникающих при этом трудностей и подробный обзор работ по указанной проблеме изложены в книге [2].

В связи со сказанным представляется целесообразным рассмотрение задач об определении формы профиля L_z, которые оказываются разрешимыми.

В качестве такой задачи рассмотрим следующую, считая, что профиль L_z обтекается вышеуказанным потоком с прямолинейной границей.

Требуется найти форму профиля L_z, положение прямолинейной границы $y = -p$, т.е. число p, и величину скорости невозмущённого потока v_∞, если на L_z задано распределение потенциала скорости φ, как функция абсциссы x точки профиля L_z в виде

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi^+(x),\ 0 \le x \le x_D,\ \text{ на верхней поверхности,} \\ \varphi = \varphi^-(x),\ 0 \le x \le x_D,\ \text{ на нижней поверхности,} \end{array} \tag{1}$$

причём $\varphi^+(0) = \varphi^-(0) = \varphi_B$, $\varphi^-(x_N + 0) = \dfrac{\varphi_H}{2}$, $\varphi^-(x_A) = 0$, $\varphi^-(x_N - 0) = \varphi_B - \dfrac{\varphi_H}{2}$, $\varphi^+(x_D) = \varphi^-(x_D)$, здесь φ_B, φ_A, x_A, x_N, x_D – известные числа, кроме того, задана величина скорости $v_D = v|_{x=x_D}$ в точке D профиля L_z и вышеуказанное число Q. Будем считать, что $\varphi^+(x)$, $\varphi^-(x)$ – дифференцируемые функции, производные которых удовлетворяет условию Гельдера в интервале $[0, x_D)$, а в окрестности точки $x = x_D$ для вышеуказанных производных справедливы представления $(\varphi^\pm(x))'_x = \Phi^\pm(x)/(x_D - x)^{\frac{1}{2}}$, $\Phi^\pm(x_D) \neq 0$.

Аналогично тому, как это сделано в [1] (с. 97-105), целесообразно считать, что заданы производные $(\varphi^\pm(x))'$ и далее вычисляются значения $\varphi^\pm(x)$. При задании значений этих производных учтем, что для точек L_z справедливо соотношение $v/\cos\eta = \varphi'_x$. Если искомый контур L_z по форме достаточно близок к реально используемому профилю, для точек большей части которого, исключая небольшой участок, содержащий точку D и малую часть, содержащую заднюю кромку B, величина $|\cos\eta|$ будет близка к единице (например, имеет место соотношение $1/\sqrt{2} \le |\cos\eta| \le 1$), то на большей части L_z (исключая участки, содержащие точки D, B) величина скорости v будет близка к $|\varphi'_x|$. При этом распределение величины скорости v на небольшом участке L_z, содержащем точку D, характеризуется задаваемым в точке D значением $v = v_D$ (и задаваемой производной $(\varphi^\pm(x))'$.

Поэтому вышеуказанную задачу можно считать близким аналогом задачи, рассмотренной в [1] (с. 97-105).

Поступая аналогично тому, как это сделано в [1] (с. 97-105), область течения D_z

разрежем по линии, соединяющей точку N профиля L_z с точкой K прямой $y = -p$, на берегах разреза которой потенциал скорости φ принимает постоянные значения.

Область D_z с указанным разрезом функцией $w = w(z)$ отображается конформно на область D_w в плоскости $w = \varphi + i\psi$, причём область D_w имеет тот же вид, что и в работе [3]; соответствующие точки в различных плоскостях обозначаются одними и теми же буквами.

Поступая как в работе [3], отобразим конформно прямоугольник D_w на кольцо $q < |\zeta^*| < 1$, расположенное в плоскости $\zeta^* = \rho e^{i\gamma}$ и разрезанное по отрезку $(q, 1)$ действительной оси, функцией $w = \omega(\zeta^*)$. Точкам A и B отвечают соответственно $\zeta^* = qe^{i\gamma_A}$ и $\zeta^* = \zeta^*_B = qe^{i\gamma_B}$, $\gamma_B = 2\pi - \gamma_A$, здесь $\gamma_A < \pi$, $\gamma_B > \pi$. Ясно, что производная $w'_{\zeta^*} = \omega'(\zeta^*)$ аналитична в области D_{ζ^*} – кольце $q < |\zeta^*| < 1$, так как в совпадающих точках берегов вышеуказанного разреза она имеет одинаковые значения. Обозначим

$$\varphi_1(\gamma) = \Re\omega(qe^{i\gamma}). \tag{2}$$

Пусть $z = z(\zeta^*)$ есть аналитическая в кольце D_{ζ^*} функция, определяемая соотношением $w(z) = \omega(\zeta^*)$, она осуществляет конформное отображение области D_{ζ^*} на D_z, при котором точке $\zeta^* = -1$ отвечает $z = \infty$. Эта функция $z(\zeta^*)$ может быть аналитически продолжена через окружность $|\zeta^*| = 1$. Следовательно, точка $\zeta^* = -1$ является полюсом второго порядка производной $z'(\zeta^*)$. Граничные значения функции $z(\zeta^*)$ обозначим $z(e^{i\gamma}) = x_0(\gamma) + iy_0(\gamma)$, $z(qe^{i\gamma}) = x_1(\gamma) + iy_1(\gamma)$. Функция

$$Z(\zeta^*) = i\zeta^* z'(\zeta^*), \tag{3}$$

аналитическая в кольце D_{ζ^*} кроме полюса $\zeta^* = -1$, имеет граничные значения

$$Z(e^{i\gamma}) = x_0'(\gamma) + iy_0'(\gamma), \quad Z(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma) + iy_1'(\gamma). \tag{4}$$

На основании равенства $w(z) = \omega(\zeta^*)$ при $\zeta^* = qe^{i\gamma}$ с учетом (1), (2) получаем

$$\varphi^{\pm}(x) = \varphi_1(\gamma). \tag{5}$$

Здесь верхний знак берется при $\gamma_D < \gamma < \gamma_B$, где γ_D есть значение γ, при котором $\varphi_1(\gamma) = \varphi^{\pm}(x_D)$, нижний знак – при остальных значениях γ из интервала $(0, 2\pi)$. Из соотношения (5) найдем функцию $x = x_1(\gamma)$, $0 \le \gamma < 2\pi$. Следовательно, будут известны значения

$$\Re z(qe^{i\gamma}) = x_1(\gamma),\ 0 \le \gamma < 2\pi. \tag{6}$$

На прямолинейной границе области D_z имеем $y = -p$, поэтому

$$\Re\left[z(e^{i\gamma})e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right] = p,\ 0 \le \gamma < 2\pi. \tag{7}$$

Мы получили краевые условия для искомой функции $z(\zeta^*)$. Так как в дальнейшем понадобятся значения производных $(z(e^i\gamma))'_\gamma$, $(z(qe^i\gamma))'_\gamma$, целесообразно найти непосредственно выражения для этих производных, используя соответствующие им краевые условия.

Дифференцируя по γ условия (6), (7), с учётом (3), (4), получим

$$\Re Z(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma),\ \Re\left[Z(e^{i\gamma})e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right] = 0,\ 0 \le \gamma < 2\pi. \tag{8}$$

Нужно найти аналитическую в кольце D_{ζ^*} функцию $Z(\zeta^*)$, имеющую полюс $\zeta^* = -1$ второго порядка и удовлетворяющую последним краевым условиям.

Для решения задачи использованы результаты статьи [4]. Показано, что решение задачи (8) определяется формулой

$$Z(\zeta^*) = \frac{e^{-i\chi(\zeta^*)}}{(\zeta^*+1)^2}\left\{U(\zeta^*)(\zeta^*-\zeta_1{}^*)+ic_1+\nu_0\left[V(\zeta^*)(\zeta^*-\zeta_1^*)+1\right]+iC_0(\zeta^*-\zeta_1^*)\right\}, \qquad (9)$$

где ν_0, C_0 – произвольные действительные постоянные, $\chi(\zeta^*) = \Phi(\zeta^*) + i\Psi(\zeta^*)$, $U(\zeta^*) = U_1(\zeta^*) + iU_2(\zeta^*)$, $V(\zeta^*) = V_1(\zeta^*) + iV_2(\zeta^*)$ – однозначные аналитические в кольце D_{ζ^*} функции, определяемые по формуле Вилля [5], (с. 238) по известным граничным значениям действительных функций соответственно $\Phi(\tau)$, $U_1(\tau)$, $V_1(\tau)$, $\tau = e^{i\gamma}$ или $\tau = qe^{i\gamma}$, $\Phi(\tau) = \nu(\tau) - \arg(\tau-\zeta_1{}^*) + 3\pi\beta_1(\tau)$, $\nu(e^{i\gamma}) = \gamma + \dfrac{3\pi}{2}$, $\nu(qe^{i\gamma}) = 2\arg(qe^{i\gamma}+1)$, $0 \le \gamma < 2\pi$, и $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(qe^{i\gamma}+1) < \dfrac{\pi}{2}$, $\zeta_1^* = re^{\frac{i\pi}{2}}$, r – произвольное выбранное число, $q < r < 1$, $\arg(\tau-\zeta_1{}^*)$ – значение на границе кольца D_{ζ^*} определённой ветви $\Theta(\zeta^*) = \arg(\zeta^*-\zeta_1{}^*)$, непрерывной и однозначной в D_{ζ^*} с разрезом вдоль линии, соединяющей точки $\zeta^* = \zeta_1{}^*$ и $\zeta^* = 1$ и лежащей внутри верхнего полукольца, $\Theta(\zeta^*)|_{\zeta^*=0} = \dfrac{3\pi}{2}$,

$$U_1(\tau) = c(\tau) - c_1\frac{\sin\Theta(\tau)}{|\tau-\zeta_1{}^*|}, \qquad V_1(\tau) = \frac{\cos(\Theta(\tau)+\pi)}{|\tau-\zeta_1{}^*|},$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[c(e^{i\gamma}) - c(qe^{i\gamma})]d\gamma, \quad c(\tau) = \frac{|\tau+1|^2 m(\tau)}{|\tau-\zeta_1{}^*|}e^{\Psi(\tau)}\cos[3\pi\beta_1(\tau)],$$

$$m(e^{i\gamma}) = 0, \quad m(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma), \quad 0 \le \gamma < 2\pi,$$

учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}\Im Z(qe^{i\gamma})d\gamma = 0, \quad \Im Z(qe^{i\gamma}) = \frac{|\varphi_1{}'(\gamma_D)|}{\nu_D}. \qquad (10)$$

Первое из этих условий есть условие замкнутости контура L_z, при выполнении второго условия скорость в точке D найденного профиля L_z будет равна заданной скорости ν_D.

Подставляя найденное решение (9) в условия (10), приходим к системе двух линейных уравнений с неизвестными ν_0, C_0, которая в общем случае будет разрешимой. Определяя из этой системы ν_0, C_0 и подставляя последние в формулу (9), получим единственное решение $Z(\zeta^*)$ рассматриваемой задачи. По найденным значениям $Z(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma) + iy_1'(\gamma)$ определяются координаты точек контура L_z и распределение скорости $\nu_1(\gamma) = \dfrac{|\varphi_1'(\gamma)|}{|Z(qe^{i\gamma})|}$ на L_z. Далее для полученного решения находятся υ_∞ и p.

Литература

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.

2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташов А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* — М.: Наука, 1994. – 436 с.

3. Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. *Видоизмененная обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана* // Известия вузов. Матем. 2008. – № 2. – С. 32-40.

4. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. *Решение краевой задачи Гильберта с разрывами коэффициента для кольца* // Изд. Казан. гос. ун-та. Труды семинара по краевым задачам, 1980. – Вып. 17. – С. 140-157.

5. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Наука, 1970. – 304 с.

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A WING PROFILE LOCATED NEAR A RECTILINEAR SCREEN

R.B. Salimov, T.Yu. Gorskaya

We consider an inverse boundary value problem for a wing profile located near a solid rectilinear boundary and flowing in an incompressible inviscid fluid with a velocity at infinity parallel to this boundary. It is required to determine the shape and position of the wing profile according to the velocity potential distribution, defined on it as a function of the abscissa of the profile point and the given difference between the values of the current function on the profile and on the rectangular boundary (or a value associated with the indicated difference).

Keywords: inverse boundary value problem, wing profile, incompressible inviscid fluid, complex potential.

УДК 517.956.2

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА С ПОМОЩЬЮ УНИФОРМИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Д.С. Сафаров[1]

1 *safarov-5252@mail.ru*; Курган-Тюбинский госуниверситет имени Н. Хусрава, Республики Таджикистан

В работе методом униформизации эллиптической кривой получено решение специальной нелинейной системы уравнений Коши – Римана, выражающееся через эллиптические функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: эллиптическая функция, дифференцируемое отображение, двоякопериодическое решение, униформизация.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим нелинейную обобщенную систему уравнений Коши – Римана

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2 = f^2(z)[4a_1 w^3 + 6a_2 w^2 + 4a_3 w + a_4] = f^2(z)G_3(z), \tag{1}$$